

# Vereinfachte Imperfektionen nach EUROCODE 3-1-1 im Vergleich zu den Formeln 5.9+5.10

Dipl.-Ing. Dr. techn. Gerald Luza

Büro Dr. LUZA, Stahlbau-Planungsbüro, Graz, Österreich

**KURZFASSUNG:** Im EUROCODE 3-1-1 werden ähnlich der DIN 18800-2 Imperfektionen für Stockwerkrahmen angegeben, die einfache und schnelle Ergebnisse bringen und auf der sicheren Seite liegen. Eine weitere Methode ist, die Imperfektionen (Vorverdrehungen und Vorkrümmungen) als Eigenform der maßgebenden Belastung und Knickform anzusetzen, sie wird in der DIN 18800 zwar angeführt, die Umsetzung ist aber schwierig, da keine Skalierung dieser Form angegeben ist. Im zukünftigen EUROCODE 3-1-1 wird eine Skalierung gezeigt, die darauf basiert, dass für den Eulerfall 2 unzählige Versuche vorhanden sind und die Theorie 2. Ordnung mit ihrer Imperfektion bis auf einen Faktor bekannt ist. So wird dieser Faktor durch Vergleich geeicht. Diese Methode nach Formeln 5.9 und 5.10 erlaubt es, speziell bei Knickstäben ohne bzw. mit sehr geringen Querbewehrungen (geringe planmäßige Biegung) schlankere Querschnitte einzusetzen.

## 1 EINLEITUNG

Vereinfachte Ansätze erleichtern dem Bauingenieur das Berufsleben. Während auf der einen Seite genau diese Vereinfachungen verlangt werden, so wird auf der anderen Seite heftigst protestiert, wenn – meist in Sonderfällen – eine etwas günstigere Auslegung eines Bauteiles mit aufwändigen Methoden möglich gewesen wäre. Von Unwirtschaftlichkeit wird sofort gesprochen, und erneut wird der Ruf nach dem Komplizierten laut.

Die Methode der Ersatzimperfektionen nach den Eigenformen (Formeln 5.9+5.10 des EUROCODE 1993-1-1) trägt diesem Argument Rechnung.

Die Erfahrung zeigt, dass die zusätzlichen Schnittgrößen aus Vorverformungen bei zusätzlichen Querbewehrungen aus Wind und Erdbeben nur eine untergeordnete Rolle spielen. Demzufolge ist ein Vergleich der beiden Ansätze der Imperfektionen nur ohne bzw. mit geringer planmäßiger Querbewehrung interessant.

## 2 BESTIMMUNGEN DES EUROCODE 3

### 2.1 Imperfektionen

Bei der Tragwerksberechnung sind geeignete Ansätze zu wählen, um die Wirkungen von Imperfektionen einschließlich Eigenspannungen und geometrischer Imperfektionen wie Schiefstellung und Abweichungen von der Geradheit, Ebenheit und Passung sowie alle kleineren Exzentrizitäten, die in den Verbindungen des unbelasteten Tragwerks auftreten, zu erfassen. (Zitat EUROCODE 3)

Die Ersatzimperfektionen decken neben den geometrischen Imperfektionen (innerhalb der geforderten Toleranzen) auch die Imperfektionen durch den Einfluss von Eigenspannungen infolge Walzens, Schweißens, Richtarbeiten, Werkstoffinhomogenitäten sowie der Ausbreitung von Fließzonen auf die Traglast im Mittel ab. (Zitat DIN 18800-2).

### 2.2 Schiefstellungen

Im EUROCODE 3 wird die globale Anfangsschiefstellung  $\phi$  definiert mit:

$$\phi = 1/200. \quad (1)$$

Dieser Wert ist für Konstruktionen kleiner 4 m zu verwenden. Über 9 m wird diese Schiefstellung auf 1/300 abgemindert. Zwischen 4 und 9 m gibt es eine Interpolation. Zudem gibt es einen Abminderungswert für die Anzahl der Stützen in einer Reihe.

Für Hochbauten dürfen diese Schiefstellungen überhaupt weggelassen werden, wenn die Horizontallasten 15 % der Vertikallasten überschreiten.

## 2.3 Vorkrümmungen nach EUROCODE 3-1-1

Knicklinie nach Tab. 6.1	elast. EC 3	plast. EC 3	elast. DIN	plast. DIN
	$e_0/L$	$e_0/L$	$e_0/L$	$e_0/L$
$A_0$	1/350	1/300	-	-
a	1/300	1/250	1/450	1/300
b	1/200	1/200	1/365	1/250
c	1/200	1/150	1/300	1/200
d	1/150	1/100	1/225	1/150

Tabelle 1: Stich der Vorkrümmungen nach EUROCODE 3 und DIN 18800-2

## 2.4 Nachweis mit normierten Eigenformen

Der Ansatz mit der Eigenform  $\eta$  wurde an den unzähligen Versuchen, die es für den Eulerfall 2 – beidseitig gelenkig gelagerter Träger auf zwei Stützen – gibt, geeicht.

$$\eta_{\text{init}} = e_{0,d} \frac{N_{\text{cr}}}{EI \eta''_{\text{cr,max}}} \eta_{\text{cr}} \quad (2)$$

oder

$$\eta_{\text{init}} = \frac{e_{0,d}}{\lambda^2} \frac{N_{\text{Rk}}}{EI \eta''_{\text{cr,max}}} \eta_{\text{cr}} \quad (3)$$

$$e_{0,d} = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) \frac{M_{\text{Rk}}}{N_{\text{Rk}}} \frac{1 - \chi \bar{\lambda}^2}{1 - \gamma \bar{\lambda}^2} \quad (4)$$

Die hier auf den ersten Blick abschreckende und unverständliche Formel wird im nächsten Kapitel durch kleine Beispiele etwas verständlicher. Zu beachten ist, dass  $\eta$  eine Eigenform, d.h. eine Kurve und keinen Einzelwert darstellt. Die Formeln skalieren die Vorverformung am Knickstabnachweis, sodass der gleiche Grenzwert entsteht.

## 2.5 Nachweismethode

Mit den oben angeführten Imperfektionen werden nach Theorie 2. Ordnung die Schnittgrößen ermittelt. Mit diesen Schnittgrößen wird der Spannungsnachweis auf plastischer Ebene geführt.

$$\frac{N_{\text{Sd}} + \frac{M_{\text{Sd}}}{W_{\text{pl}}}}{f_{\text{yd}}} \leq 1 \quad (5)$$

Dieser vereinfachte Querschnittsnachweis liegt der Eichung der Formeln 5.9 und 5.10 zugrunde. Ein Nachweis mit M-N-Interaktionen nach EUROCODE 3 würde zu höheren Traglasten führen, die aber auf der unsicheren Seite liegen. Damit kann die Formel auch in der folgenden Form angeschrieben werden

$$\frac{N_{\text{Sd}}}{f_{\text{yd}}} \left( \frac{1}{A} + \frac{e_0}{W_{\text{pl}}} \right) \leq 1 \quad (6)$$

und mit dem Dischinger-Faktor

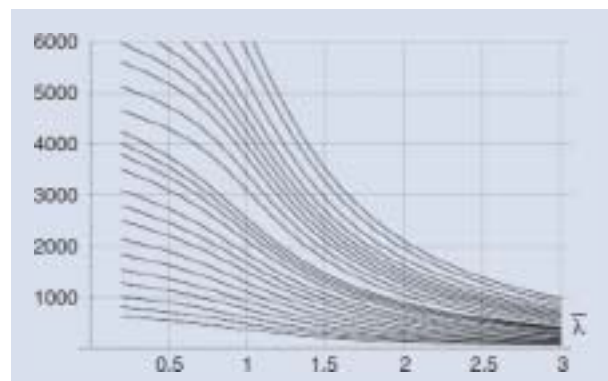
$$M_{\text{Sd}} = N_{\text{Sd}} \frac{e_0}{1 - \frac{N_{\text{Sd}}}{N_{\text{cr}}}} \quad (7)$$

kann die maximale Traglast  $N_{\text{Sd}}$  aus der Bedingung

$$N_{\text{Sd}} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{W_{\text{pl}}} \frac{e_0}{1 - \frac{N_{\text{Sd}}}{N_{\text{cr}}}} \right) = f_{\text{y,d}} \quad (8)$$

ermittelt werden.

Biegedrillknicken wird bei den folgenden Vergleichen vernachlässigt. Betrachtet werden Vorverformungen jeweils nur um eine Achse.

Abbildung 1: Traglast der HE-B Reihe um die y-Achse;  $e_0$  mit Formeln den 5.9+5.10

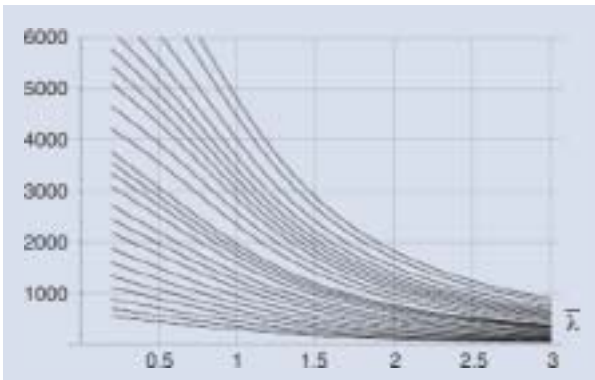


Abbildung 2: Traglast der HE-B Reihe um die y-Achse;  $e_0$  nach 5.3.2 (3)

Der Unterschied der beiden letzten Grafiken (Abbildungen 1, 2) ist leicht zu erkennen und wird im Kapitel 4 als der um eins verminderte Verhältniswert

$$\frac{N_{sd}[e_0 5.9+5.10]}{N_{sd}[e_0 5.3.2(3)]} - 1 \quad (9)$$

dargestellt und als Erhöhungsfaktor bezeichnet. Die Traglasten nach der vorletzten Grafik haben den Verlauf entsprechend den  $\chi$ -Linien des Knickstabnachweises.

### 3 BEISPIELE ZUM VERSTÄNDNIS

#### 3.1 Der beidseitig gelenkig gelagerte Druckstab

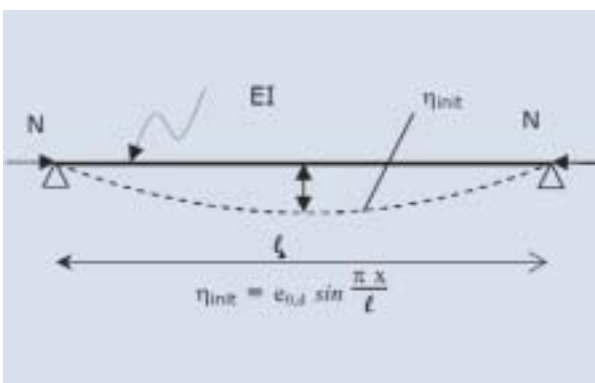


Abbildung 3: Gelenkig gelagerter Stab (Eulerfall 2) mit der Druckkraft  $N$  und der Stabsteifigkeit  $EI$

Mit der Ansatzfunktion für den beidseitig gelenkig gelagerten Druckstab (Abbildung 3) ergibt sich nach dem Ansatz der Formel (5):

$$\eta_{cr} = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10)$$

ist  $\eta_{cr}$

$$\eta_{cr}'' = w_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (11)$$

und das Maximum wird bei  $x = l/2$  zu

$$\eta_{cr,max}'' = w_0 \frac{\pi^2}{l^2} \quad (12)$$

Setzt man nun Gleichung (12) in (5) ein, so erhält man:

$$\eta_{init} = \frac{e_{0,d}}{\lambda^2} \frac{N_{Rk}}{EI} w_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (13)$$

Man erkennt, dass sich die Amplitude  $w_0$  der Ansatzfunktion herauskürzen lässt.

$$\eta_{init} = \frac{e_{0,d}}{\lambda^2} \frac{N_{Rk}}{EI} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (14)$$

bzw.

$$\eta_{init} = e_{0,d} \frac{N_{cr}}{EI} \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (15)$$

Berücksichtigt man die ideale Knicklast

$$N_{cr} = EI \frac{\pi^2}{l^2}, \quad (16)$$

dann erhält man schließlich den einfachen Ausdruck

$$\eta_{init} = e_{0,d} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (17)$$

bzw. normiert auf das Maximum der Verschiebung (bei  $x = l/2$ ) gleich 1:

$$\eta_{init, max} = e_{0,d} \quad (18)$$

Dargestellt in der Form der Gleichung (2) mit  $e_{0,d}$  ergibt sich

$$\eta_{init, max} = e_{0,d} \quad (\eta_{cr, max} = 1) \quad (19)$$

Damit erkennt man, dass Gleichung (2) wie folgt angeschrieben werden kann

$$\eta_{init} = e_{0,d} \left| \eta_{cr} \right| \quad (20)$$

mit der auf die maximale Verschiebung normierten Ansatzfunktion

$$\eta_{init} = \left| \eta_{cr} \right| = 1, \quad (21)$$

### 3.2 Der einseitig eingespannte Druckstab

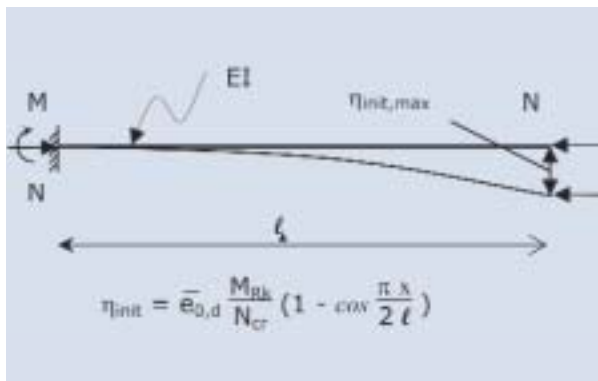


Abbildung 4: Einseitig eingespannter Druckstab (Eulerfall 1) mit der Druckkraft  $N$  und der Stabsteifigkeit  $EI$

Analog dem Eulerfall 2 ist mit der Ansatzfunktion für den einseitig eingespannten Druckstab (Abbildung 4)

$$\eta_{cr} = w_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2 l} \right) \quad (22)$$

und  $\eta_{cr}''$  gleich

$$\eta_{cr}'' = w_0 \frac{\pi^2}{4 l^2} \cos \frac{\pi x}{2 l} \quad (23)$$

und das Maximum wird bei  $x = 0$  zu

$$\eta_{cr, max}'' = w_0 \frac{\pi^2}{4 l^2} \quad (24)$$

Setzt man nun Gleichung (12) in (2) ein, so erhält man:

$$\eta_{init} = e_{0,d} \frac{N_{cr}}{EI w_0 \frac{\pi^2}{4 l^2}} \left( 1 - w_0 \cos \frac{\pi x}{2 l} \right) \quad (25)$$

Man erkennt, dass sich die Amplitude  $w_0$  der Ansatzfunktion herauskürzt.

$$\eta_{init} = e_{0,d} \frac{N_{cr}}{EI \frac{\pi^2}{4 l^2}} \cos \frac{\pi x}{2 l} \quad (26)$$

Berücksichtigt man die ideale Knicklast für den Eulerfall 1

$$N_{cr} = EI \frac{\pi^2}{4 l^2} \quad (27)$$

erhält man schließlich den einfachen Ausdruck

$$\eta_{init} = e_{0,d} \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2 l} \right) \quad (28)$$

der wiederum der allgemein zu verwendenden Formel (20) entspricht.

### 3.3 Der ebene Rahmen

Für allgemeine Strukturen sind in den aktuellen Normen (DIN 18800-2:1990 bzw. EUROCODE 1993-1-1) vereinfachte Ansätze für Imperfektionen angegeben.

Für die EDV-gestützte Berechnung ist eine Bestimmung der Knicklasten sowie der zugehörigen Eigenformen heute eine Standardaufgabe.

Als Beispiel soll der Vergleich eines Zweigelenrahmens nach den genormten Eigenfunktionen nach Formeln 5.9 und 5.10 und den Vorverdrehungen nach Kapitel 5.3.2 (3) dienen (Abbildung 5).

Wiederum gilt der einfache Ansatz:

$$\eta_{init} = e_{0,d} \left| \eta_{cr} \right| \quad (29)$$

Zu beachten ist, dass die Norm nur auf die Verschiebungen normal zur jeweiligen Stabachse anzuwenden ist. Die Imperfektion  $e_{0,d}$  ist dementsprechend mit den Werten zu berechnen, an denen der Wert der genormten Knickfigur  $|\eta_{cr}|$  gleich eins (bzw. das Maximum) ist.

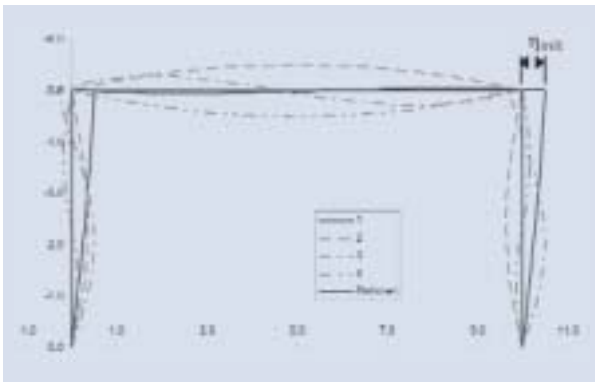


Abbildung 5: Ein ebener Zweigelenrahmen mit seinen ersten vier Eigenformen

## 4 VERGLEICH

Ein Vergleich wird in der Folge nur für den Eulerfall 2 mit ausgewählten Profilreihen gezeigt. Verglichen werden ausschließlich Profile der Stahlgüte S235 und plastischem Querschnittsnachweis.

### 4.1 Vergleichene Profilreihen

Der Vergleich der Imperfektionen nach 5.3.2 (3) und 5.3.2 (11) bzw. 5.9 und 5.10 wurde mit Walzprofilreihen durchgeführt.

Um die Einflüsse von unterschiedlichen Querschnittsformen zeigen zu können, wurden die Profilreihen IPE, HE-AA, HE-B und die Arbed-Reihe HD 400 herangezogen.

Bei den Profilreihen HE-AA und HE-B ist darauf zu achten, dass mit der Bedingung  $h/b < 1,2$  eine andere europäische Knickspannungslinie mit der gleich bleibenden Gurtbreite zum Einsatz kommt.

Die folgenden Grafiken zeigen die relative Erhöhung der kritischen Knicklast bzw. Grenzlast bei Anwendung der Vorverformung nach Formeln 5.9 und 5.10 in Abhängigkeit des relativen Schlankheitsgrades  $\bar{\lambda}$  (nach DIN 18800: bezogener Schlankheitsgrad) in einem Bereich von 0,2 bis 3,0.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha_{alt,k}}{\alpha_{cr}}} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} \quad (30)$$

bzw. in der Form

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_k}{\lambda_a} \quad (31)$$

mit der Bezugsschlankheit  $\lambda_a$

$$\lambda_a = \pi \sqrt{\frac{E}{f_{yk}}} \quad (32)$$

und der bislang gewohnten Schlankheit  $\lambda_k$ .

Als Bezug für die Erhöhungswerte sind die vereinfachten Vorkrümmungen nach Tabelle 1 angesetzt.

### 4.2 IPE-Profilreihe

Der Vergleich der beiden folgenden Auswertungen zeigt, dass um die starke Achse fast alle Profile die gleiche Eigenschaft besitzen (Abbildung 6). Bei einem relativen Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}$  von rund 0,9 zeigt sich die größte Erhöhung von rund 25 % (0,25).

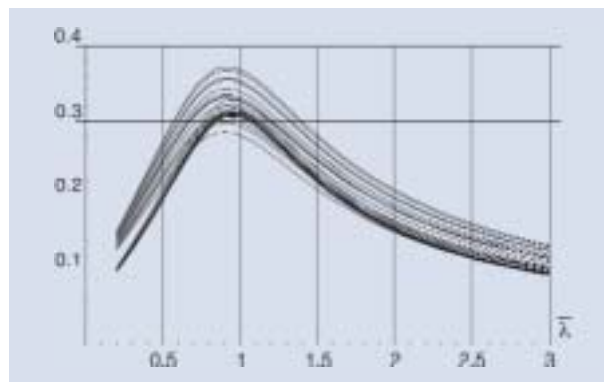


Abbildung 6: IPE-Profilreihe um die starke Achse

Um die schwache Hauptachse ist das Maximum ebenfalls bei rund 0,9. Solange die Gurtbreite mit der Profilhöhe zunimmt, fällt der Erhöhungsfaktor von 0,38 auf 0,33 und bleibt dann bei größeren Profilen mit 0,33 gleich (Abbildung 7).

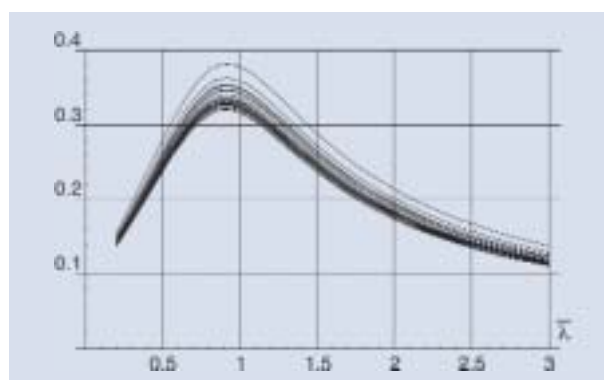


Abbildung 7: IPE-Profilreihe um die schwache Achse

#### 4.3 HE-AA-Profilreihe

Eine interessante Profilreihe ist die HE-AA-Reihe, die mit „sehr leichten“ Gurten ausgestattet ist. Um die starke Achse sind zwei typische Linienbündel zu sehen, die die jeweiligen Knickspannungslinien deutlich aufzeigen (Abbildung 8). Das untere zeigt die größeren Profile nach Knickspannungslinie a.

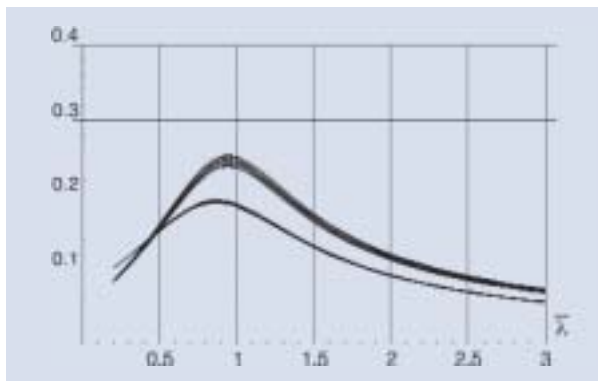


Abbildung 8: HE-AA-Profilreihe um die starke Achse

Ein ähnliches Bild zeigt sich um die schwache Achse. Mit der Knickspannungslinie c für die kleinen Profile streuen die Erhöhungswerte von 0,4 (kleinstes Profil) zu 0,32. Für die Knickspannungslinie b für die Profile mit gleich bleibender Gurtbreite bleiben die Erhöhungswerte bei 0,31 (Abbildung 9).

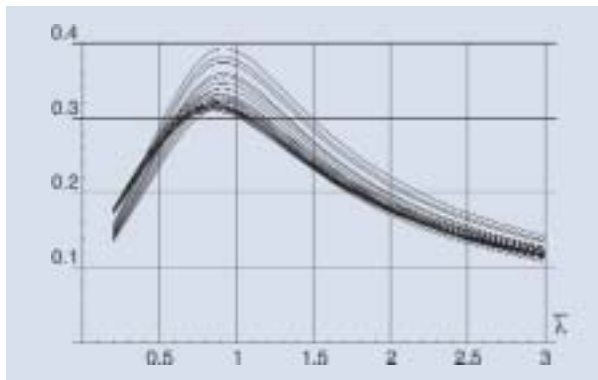


Abbildung 9: HE-AA-Profilreihe um die schwache Achse

#### 4.4 HE-B-Profilreihe

Typisch für die HE-B-Profilreihe ist der Wechsel der Knickspannungslinie. Durch diesen Wechsel und durch die gleich bleibende Gurtbreite sieht man, dass sich die Linien über dieser Grenze nahezu decken, bei kleineren Profilen streut die Erhöhung zwischen 0,28 und 0,37. Auch der Ort des Höchstwertes verändert sich dabei geringfügig (Abbildung 10).

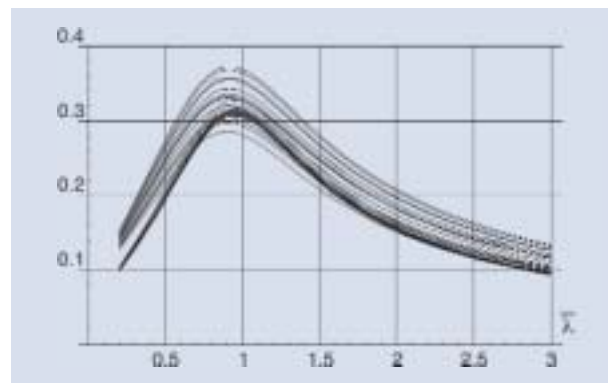


Abbildung 10: HE-B-Profilreihe um die starke Achse

Die Abbildung 11 zeigt – interessehalber – die gleiche Kurvenschar, allerdings ohne Wechsel der Knickspannungslinie. Dadurch ergibt sich bei gleich bleibender Gurtbreite ein Abfall des Kurvenbündels von 0,32 auf 0,26 (Vergleich mit Abbildung 10). Der Streubereich der kleineren Profile bleibt hingegen gleich von 0,37 auf 0,28.

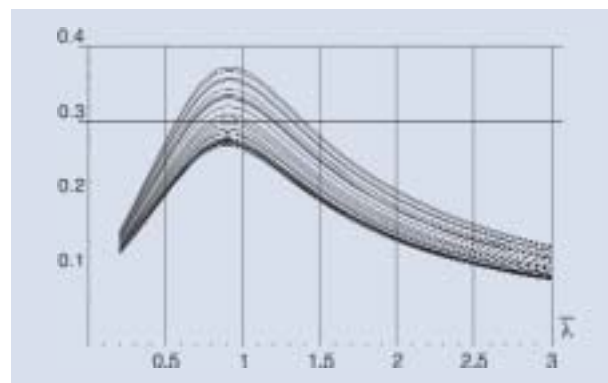


Abbildung 11: HE-B-Profilreihe um die starke Achse ohne Wechsel der Knickspannungslinie

Ausgeprägter und gleichmäßiger ist der Verlauf um die schwache Achse bei der HE-B-Profilreihe. Bei den Profilen, bei denen die Gurtbreiten gleich bleibend sind, decken sich die Erhöhungslinien nahezu, bei kleineren Profilen steigt die Erhöhung auf bis zu 0,35 (Abbildung 12).

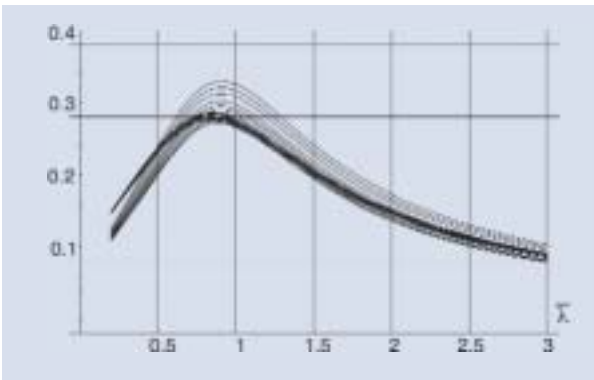


Abbildung 12: HE-B-Profilreihe um die schwache Achse

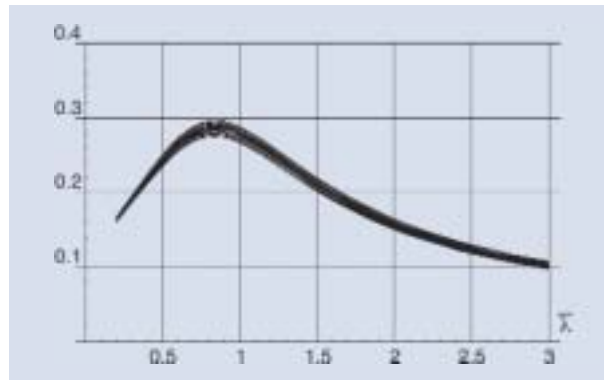


Abbildung 14: HE-400-Profilreihe um die schwache Achse

#### 4.5 HD-400-Profilreihe

Die Reihe HD der Firma Arbed zeichnet sich durch besonders dicke Gurte und Stege aus. Für die Betrachtung wurden nur die HD-400-Profile herangezogen. Hier sieht man, dass sich die annähernd gleich großen Profile mit dicker werdenden Gurten und Stegen in ihrer Sensibilität gegenüber den unterschiedlichen Imperfektionen nicht verändern.

Der Gurt wird bis zu 78 mm dick, die Stege bis zu 125 mm. Die Profile sind so bestimmt, dass durchwegs die europäischen Knickspannungslinien b (y-y) bzw. c (z-z) herangezogen werden können. Es wurde hierbei angenommen, dass für Flanschdicken größer 100 mm keine Einstufung in d vorgenommen werden muss. Der Fall  $h/b > 1,2$  und  $t_f > 100$  mm ist dezidiert nicht angeführt.

Der Vergleich der beiden folgenden Auswertungen zeigt, dass um die starke Achse fast alle Profile die gleiche Eigenschaft besitzen. Bei einem relativen Schlankheitsgrad  $\bar{\lambda}$  von rund 0,85 zeigt sich die größte Erhöhung von rund 19 %.

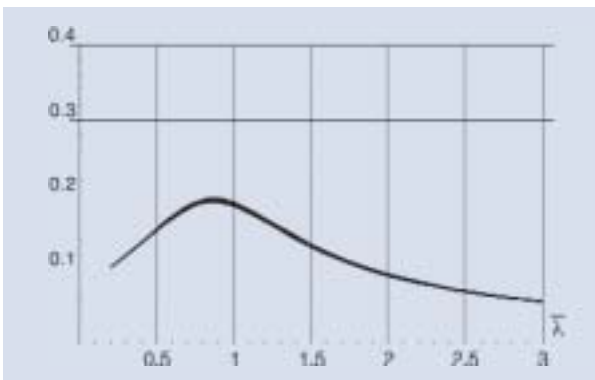


Abbildung 13: HD-400-Profilreihe um die starke Achse

Auch um die schwache Achse zeigen sich kaum Streuungen, der maximale Erhöhungsfaktor liegt bei einem relativen Schlankheitsgrad bei 0,28-0,30.

#### 4.6 Weitere Untersuchungen

Ähnlich angesetzte Berechnungen der kleineren vereinfachten Vorkrümmungen (Tabelle 1) nach DIN 18800 zeigen, dass auch diese noch geringere Traglasten bringen als nach den Formeln 5.9 und 5.10. Für eine generelle Aussage müssten aber umfangreichere Studien gemacht werden.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG

Die Auswertung verschiedener Profilreihen mit unterschiedlichen Knickspannungslinien zeigt, dass die vereinfachten Imperfektionen nach 5.3.2 (3) in gewissen Bereichen sehr viel kleinere rechnerische Traglasten bewirken. In Einzelfällen kann eine Untersuchung mit den Ansätzen nach den skalierten Eigenformen durchaus interessant sein. Die Größe der möglichen rechnerischen Traglastenerhöhung ist abhängig von der Knickspannungslinie und von der Profilabmessung, liegt aber bei dem interessanten relativen Schlankheitsgrad von 0,8-0,9 zwischen 0,15 und 0,40. Bessere Knickspannungslinien (a<sub>0</sub>, a, b) zeigen geringere Erhöhungen, schlechtere zeigen höhere Erhöhungen. Abschließend soll noch angemerkt werden, dass nach den 5.3.2 (3) mit N-M-Interaktion gerechnet werden kann, was hier nicht getan wurde, während nach 5.9 + 5.10 eine N-M-Interaktion theoretisch nicht richtig ist.

## LITERATUR

- [1] prEN1993-1-1 Stage 49: June 2004 EUROCODE 3: Design of Steel Structures, Part 1-1, General rules and rules for buildings.
- [2] DIN 18800, Teil 2: Stahlbauten, Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken, (Ausgabe 11.1990).
- [3] Luza G.; Aigner F.: Größe der Imperfektionen nach 5.3.2 (11) in prEN 1993-1-1; Vorlage beim Fachnormenausschuss FNA 013 Stahlbau.
- [4] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Braunschweig: Vieweg 1992.